11 Soit $\mathcal{H}$ l'hyperbole d'équation $xy = 1$.

On désigne par A, B et C les points de $\mathcal{H}$ d'abscisses respectives 1, 2 et $-\frac{1}{2}$.

1.Montrer que la tangente en A à $\mathcal{H}$ est perpendiculaire à (BC).

2.On désigne par F le point de $\mathcal{H}$ d'abscisse 3.

a. Donner une équation cartésienne de la hauteur issue de A du triangle ABF.

b. Démontrer que l'orthocentre de ABF est un point de $\mathcal{H}$.

12 Pour chacune des ellipses suivantes, déterminer ses foyers, ses sommets et une équation de chacune de ses directrices, son excentricité, puis la tracer.

a. $4x^2 + 9y^2 = 36$.

b. $9x^2 + 4y^2 = 36$.

c. $-25x^2 - 9y^2 = -25$.

13 Soit $\mathscr{C}$ un cercle de centre O et de rayon $R > 1$.

A tout point M d'affixe $z = Re^{i\theta}$ du cercle $\mathscr{C}$, on associe le point M′ d'affixe $\frac{1}{z}$.

1. Déterminer la partie réelle et la partie imaginaire du milieu de I de $[MM']$.

2. Montrer que I varie sur une ellipse $\mathcal{E}$ lorsque M varie sur $\mathscr{C}$.

3. Donner les éléments caractéristiques de $\mathcal{E}$.

14 1. a. Construire la courbe $\mathcal{C}$ d'équation $3x^2 + 4y^2 + 6x - 9 = 0$.

b. Déterminer les foyers et les directrices.

2. Soit M un point de $\mathcal{C}$ d'affixe $z = re^{i\theta}$, $r > 0$.

a. Exprimer r en fonction de θ.

b. Exprimer à l'aide de θ, la distance MM′ où M′ est le symétrique de M par rapport à O.

c. Déterminer θ pour que la distance MM′ soit maximale.

d. Déterminer θ pour que la distance MM′ soit minimale.

15 Soit la courbe $\mathcal{C}$ d'équation $25\left(x^2 + y^2\right) = (3x - 16)^2$.

1. Déterminer la nature de $\mathcal{C}$ et son excentricité.

2. Soit M un point de $\mathcal{C}$. On pose $(\vec{i}, \overrightarrow{OM}) = a\ [2\pi]$.

Exprimer OM à l'aide de a.

3. La droite (OM) coupe la directrice en I et recoupe la conique $\mathcal{C}$ en M′.

a. Montrer que $\frac{1}{OM} + \frac{1}{OM'}$ est une constante.

b. Montrer que $\frac{1}{\overline{OM}} + \frac{1}{\overline{OM'}} = \frac{2}{\overline{OI}}$ pour tout M de $\mathcal{C}$.

16 Soit $\mathcal{E}$ une ellipse d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $a > b$. Soit $M_0(x_0, y_0)$ un point de $\mathcal{E}$.

On désigne par T la tangente à $\mathcal{E}$ en M_0.

Donner l'équation de la perpendiculaire T′ à T en M_0.

La droite T′ coupe les axes du repère en N et P.

Montrer que le rapport $\frac{M_0N}{M_0P}$ est constant.

17 Soit $\mathcal{E}$ une ellipse d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $a > b$ et dont l'un des foyers est noté F. Une droite variable D passant par F coupe l'ellipse en M et N.

Montrer que $\frac{1}{FM} + \frac{1}{FN}$ est constant.

18 Soit f l'application du plan dans lui-même qui à tout point $M(x, y)$ associe le point M′ de coordonnées $\begin{cases} X = \sqrt{2}(x + y) \\ Y = \sqrt{2}(x - y) \end{cases}$.

1. Montrer que f est la composée d'une symétrie axiale que l'on précisera et d'une homothétie de centre O et de rapport 2.

2. Une courbe $\mathcal{C}$ a pour image par f la courbe $\mathcal{C}'$ d'équation $5X^2 + 5Y^2 + 6XY - 64 = 0$.

a. Déterminer une équation de $\mathcal{C}$, ses foyers et ses directrices.

b. En déduire que $\mathcal{C}$ est une conique que l'on caractérisera.

c. Construire $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$.